Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики

Дискретная математика
курс лекций
лекция 1

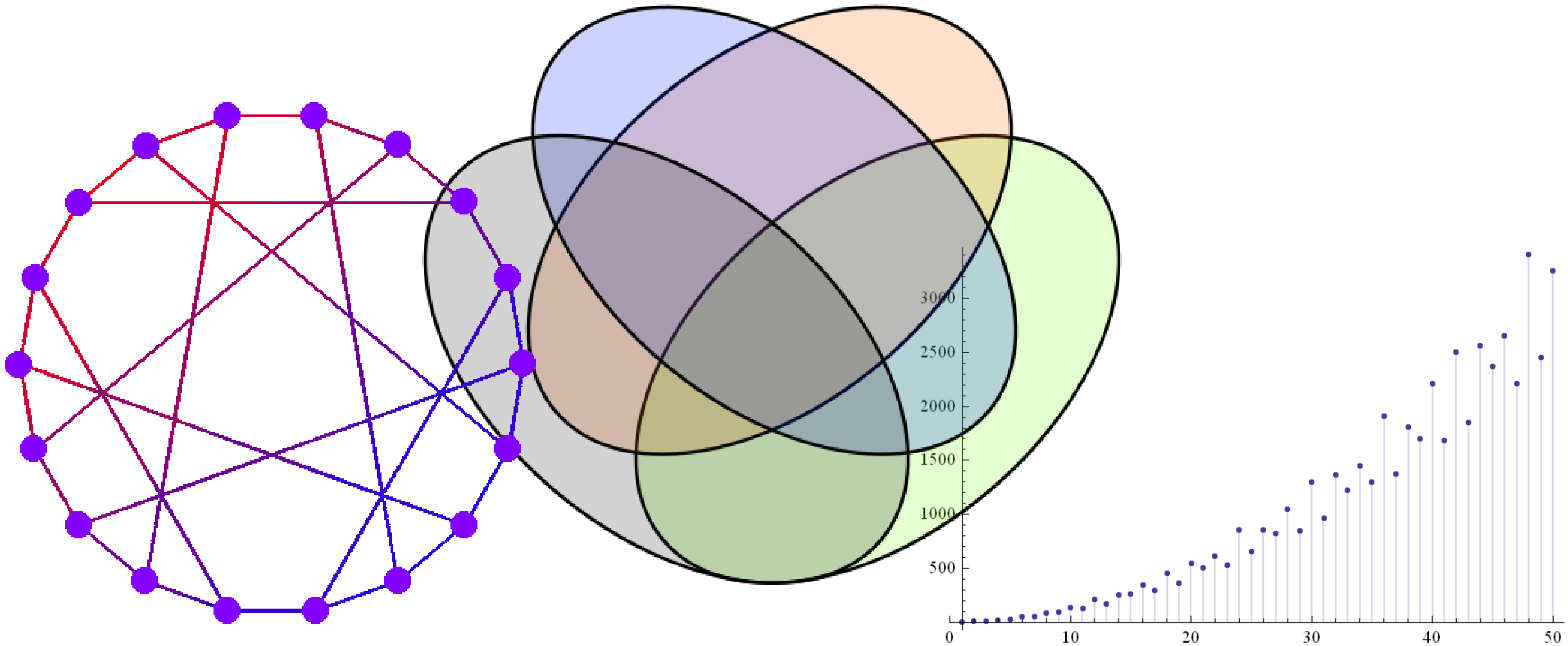
Введение.
Системы счисления

Кафедра «Проектирования и безопасности компьютерных систем»
Гришенцев А. Ю.
www.moveinfo.ru

Санкт-Петербург
2014

Область знаний дискретной математики

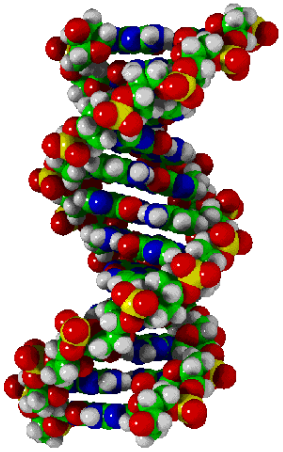
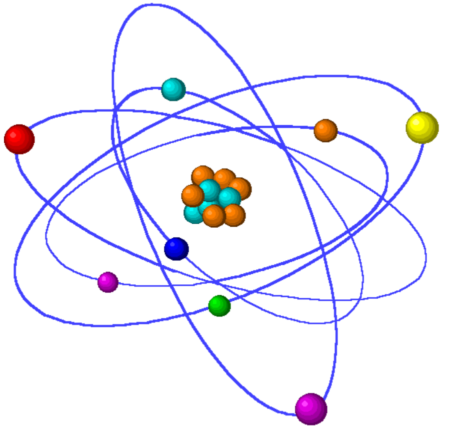
Дискретная математика – область математики, изучающая структуру, порядок и отношения дискретных величин.



Дискретность от лат. *discretus* — разделённый, прерывистый.

Объекты кажущиеся на первый взгляд непрерывными на самом деле могут быть дискретными



Многое зависит от масштаба...

Место дискретной математики

- Алгебра и анализ
- Теория графов и теория матриц
- Теория чисел и математическая статистика
- Теория множеств и логика
- Численные методы и цифровая обработка

Практика применения методов дискретной математики

- Электроника и схемотехника
- Проектирование ЭВС и вычислительные сети
- Программирование и цифровая обработка сигналов
- Информационная безопасность и криптография
- Оптимизация и исследование операций
- Численные методы и цифровая обработка
- Логистика и менеджмент
- … … … … … … … … … … … …

Системы счисления

Система счисления – метод формального (знакового) представления чисел.

****

Позиционные системы счисления – значение числа зависит от позиции знаков в его записи.

Непозиционные системы счисления - значение числа не зависит от позиции знаков в его записи, возможны дополнительные условия определяющие порядок записи знаков (системы счисления: римская, остаточных классов и др.).

Смешанные системы счисления – присутствуют признаки позиционной и непозиционной систем счисления (системы счисления: *Фибоначчи*, факториальная и др.).

Соотношения в некоторых позиционных системах

двоичная x_2	восьмеричная x_8	десятичная x_{10}	шестнадцатеричная x_{16}
0000	00	00	0
0001	01	01	1
0010	02	02	2
0011	03	03	3
0100	04	04	4
0101	05	05	5
0110	06	06	6
0111	07	07	7
1000	10	08	8
1001	11	09	9
1010	12	10	A
1011	13	11	B
1100	14	12	C
1101	15	13	D
1110	16	14	E
1111	17	15	F

Три разряда в двоичной системе соответствуют одному в восьмеричной, четыре разряда в двоичной - одному в шестнадцатеричной.

Позиционная система счисления

$$x = \sum_{k=M}^{N-1} a_k b^k \qquad (1.1)$$

b – *целое число, основание системы счисления* $(b > 1)$,

a_k – *знак (цифра) в разряде* k, $0 \le a_k \le (b-1)$,

k – *номер разряда.*

****

Пример (1.1): произвести перевод $1011.01001_2 \rightarrow x_{10}$.

Номер разряда	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5
Значение	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**

$$x_{10} = 1\cdot 2^3 + 0\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0 + 0\cdot 2^{-1} +$$

$$+ 1\cdot 2^{-2} + 0\cdot 2^{-3} + 0\cdot 2^{-4} + 1\cdot 2^{-5} = 11.28125_{10}$$

Многочлен (1.1) называют *многочленом Горнера*, а метод преобразования чисел с использованием данного многочлена *Метод Горнера*.

Ещё примеры

Пример (1.2): произвести перевод $2A.1E_{16} \rightarrow x_{10}$.

$$x_{10} = 2 \cdot 16^{1} + 10 \cdot 16^{0} + 1 \cdot 16^{-1} + 14 \cdot 16^{-2} = 42.1171875$$

Пример (1.3): произвести перевод $17.875_{10} \rightarrow x_2$.

Целая часть	*Дробная часть*
$17 : 2 = 8 + 1$	$0.875 \cdot 2 = 1.75$
$8 : 2 = 4 + 0$	$0.750 \cdot 2 = 1.50$
$4 : 2 = 2 + 0$	$0.500 \cdot 2 = 1.00$
$2 : 2 = 1 + 0$	*Результат*
$1 : 2 = 0 + 1$	10001.111_2

Форматы с фиксированной точкой

Смещённый двоичный		С разделением поля		Дополнительный код	
x_{10}	x_2	x_{10}	x_2	x_{10}	x_2
8	1111	7	0111	7	0111
7	1110	6	0110	6	0110
6	1101	5	0101	5	0101
5	1100	4	0100	4	0100
4	1011	3	0011	3	0011
3	1010	2	0010	2	0010
2	1001	1	0001	1	0001
1	1000	0	0000	0	0000
0	0111	0	1000	-1	1111
-1	0110	-1	1001	-2	1110
-2	0101	-2	1010	-3	1101
-3	0100	-3	1011	-4	1100
-4	0011	-4	1100	-5	1011
-5	0010	-5	1101	-6	1010
-6	0001	-6	1110	-7	1001
-7	0000	-7	1111	-8	1000

Наиболее используемый формат – *дополнительный код*.

Дополнительный код

Способ перевода 1

1. *Для положительных чисел преобразование* $x_{10} \to x_2$.

2. *Для отрицательных чисел*:

2.1. *взять модуль числа и*

преобразовать в двоичный формат $|x_{10}| \to x_2$;

2.2. *инвертировать все биты и добавить единицу*.

Способ перевода 2

Использовать свойство: $0 - x_2 = -x_2$.

<u>Пример (1.4):</u> преобразовать в дополнительный код: -18_{10}

$$\text{Способ 1}: (-18_{10}) \to |00010010_2| \to 11101101_2 \to 11101110_2$$

$$\text{Способ 2}: \ |-18_{10}| \to 0001\,0010_2 \qquad \begin{array}{r} 0000\,0000_2 \\ -\ 0001\,0010_2 \\ \hline 1110\,1110_2 \end{array}$$

Необходимо помнить о возможности переполнения.

Применение в C++ и assembler, целочисленные типы

Разрядность	C++*	asm*	диапазон unsigned	диапазон signed
8 (байт**)	char, (__int8)	DB (data byte)	0…255	–128…127
16	short int, (__int16)	DW (data word)	0…65535	-32768...32767
32	int, (__int32)	DD (d. double word)	0… …4294967295	-2147483648… …2147483647
64	long int, (__int64)	DQ (d. quad word)	$0..2^{64}$-1	$-2^{63}…2^{63}$-1

*В общем случае соответствие типа физическому числу битов зависит от характеристик ЭВМ и типа компилятора.

**Байт – совокупность нескольких битов, единица обработки информации связанная с архитектурой данной вычислительной машины. Наиболее распространён 8-ми битный байт (октет).

Числа с плавающей точкой

Числа с плавающей точкой – используют для записи действительных чисел.

$$m \cdot b^p \qquad (1.2)$$

$m - \text{мантиса}; \; b - \text{основание системы счисления};$

$p - \text{показатель степени}.$

$\text{Нормальная форма}: \quad 0 \le |m| < 1.$

$\text{Нормализованная форма}: 1 \le |m| < b.$

Наиболее распространённым стандартом для арифметики с плавающей точкой является

IEEE (ANSI/IEEE Std. 754-1985).

(www.ieee.org)

Формат чисел с плавающей точкой

Короткое вещественное число 32 разряда (*2.125*)*

знак (*s*)	*характеристика (r)*							мантисса (*m*)																						
31	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

$$(-1_{10})^s \cdot m \cdot 2_{10}{}^{p} = (-1_{10})^s \cdot m \cdot 2_{10}{}^{r-q} \qquad (1.3)$$

$r -$ *характеристика показателя;* $q -$ *смещение.*

$$(-1_{10})^s \cdot m \cdot 2_{10}{}^{r-127_{10}} =$$

$$= (-1_2)^{1_2} \cdot (1_2 + 0.0001_2) \cdot 10_2{}^{10000000_2 - 01111111_2} = 2.125_{10}$$

*В нормализованном виде первая цифра мантиссы всегда равна 1 (единице) поэтому, для экономии разрядов, её исключают.

Специальные комбинации битов в записи чисел с плавающей точкой (32 бита)

знак (s)	характерист. (r)								мантисса (m)																							значение
31	**30**	**29**	**28**	**27**	**26**	**25**	**24**	**23**	**22**	**21**	**20**	**19**	**18**	**17**	**16**	**15**	**14**	**13**	**12**	**11**	**10**	**9**	**8**	**7**	**6**	**5**	**4**	**3**	**2**	**1**	**0**	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	+0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	- 0
0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	infinity
1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-infinity
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	NaN
x	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	SNaN
x	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	QNaN
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	uncert.

Infinity – бе<u>З</u>конечность; NaN – (англ. Not-a-Number) не число; SNaN – (англ. signaling NaN) сигнальное не число вызывает исключение; QNaN – (англ. quiet NaN) спокойное не число; uncertain – вещественная неопределённость.

Применение в C++, вещественные типы

	короткий	**длинный**	**расширенный**
тип C++	float	double	long double
Размер, бит	0…31 (32)	0…63 (64)	0…79 (80)
Размерность s/r/m, (бит)	1/8/23	1/11/52	1/15/64
Разряд знака (*s*)	31	63	79
Разряды характеристики (*r*)	23…30	52…62	64…78
Разряды мантиссы(m)	0…22	0…51	0…63
Диапазон значений	$1.2 \cdot 10^{-38}$… …$3.4 \cdot 10^{+38}$	$2.3 \cdot 10^{-308}$… …$1.7 \cdot 10^{+308}$	$3.4 \cdot 10^{-4932}$… …$1.1 \cdot 10^{+4932}$
Значение смещения (*q*)	127	1023	16383
Диапазон порядков (*p*)	-126…127	-1022…1023	-16382…16383

Существуют другие разновидности форматов вещественных чисел используемые в различных приложениях и устройствах.

Желательно посетить ресурс http://www.binaryconvert.com/
и проверить свои навыки преобразования чисел в различные форматы.

Список литературы

1. Набебин А. А. Дискретная математика. – М.: Научный мир, 2010. 512 с.: ил.
2. Андерсон Дж. А. Дискретная математика и комбинаторика. : Пер с англ. – М. Издательский дом «Вильямс», 2004. – 960 с.: ил. – Паралл. тит. англ.
3. Пирогов В. Ю. Ассемблер для Windows. Изд. 4-е перераб. и доп. – СПб.: БХВ-Петербург, 2007. – 896 с.: ил. + CD-ROM.
4. Юров В. И. Assembler. Учебник для вузов. 2-е изд. – СПб.: Питер, 2011. – 637 с.: ил.
5. Прата С. Язык программирования С++. Лекции и упражнения, 6-е изд.: Пер. с англ. – М.: ООО «И.Д. Вильямс», 2013. – 1248 с.: ил. – Парал. тит. англ.
6. Гашков С. Б. Системы счисления и их применение. – М.: Изд. Московского центра непрерывного математического образования, 2004. – 52 с.: ил.

Сандро Боттичелли «Мадонна с книгой» 1480-е. Музей Польди Пеццоли, Милан.